

壹、填空题(每小題 4 分共 100 分)

1、討論下列二元二次方程式的圖形：(請回答圓、拋物線、橢圓、雙曲線、一點、兩直線或無此圖形等其中一個答案)

(1) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 18y + 29 = 0 \cdots(1)$

(2) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 18y + 12 = 0 \cdots(2)$

(3) $2x^2 - 3y^2 + 4x - 6y - 13 = 0 \cdots(3)$

(4) $2x^2 - 3y^2 + 4x - 6y - 1 = 0 \cdots(4)$

2、雙曲線，請依序回答下列各問題：

(1) 有二定點 $F(2, -1)$ 與 $F'(2, 5)$ 及一動點 P ，若 $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 4\sqrt{2}$ ，求所有 P 點所形成圖形的方程式。 $\cdots(5)$

(2) 兩焦點 $(7, -3)$ 、 $(-3, -3)$ ，實軸長為 8，則此雙曲線之正焦弦長為何? $\cdots(6)$

(3) 共軛軸在 $y = 2$ 上，焦點 F 為 $(4, 7)$ ，且過點 $A(4, 6)$ ，則此雙曲線之漸近線方程式為何? $\cdots(7)$

(4) 求中心在原點，實軸在 y 軸上，且過點 $(4, 5)$ 的等軸雙曲線方程式為何?(請以標準式表示)。 $\cdots(8)$

(5) 已知 $|\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} - \sqrt{(x+5)^2 + (y+5)^2}| = 8$ ，則此雙曲線之共軛軸方程式為何? $\cdots(9)$

4、橢圓，請依序回答下列各問題：

(1) $\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y+5)^2} = 6$ ，則此橢圓之正焦弦長為何? $\cdots(10)$

(2) 長軸在 $x = 3$ 上，短軸在 $y + 4 = 0$ 上，長軸長為 4，短軸長為 1，則此橢圓之方程式為何?(請以標準式表示) $\cdots(11)$

(3) 一焦點 $(1, 3)$ ，短軸一端點 $(-3, 6)$ ，長軸平行 x 軸，則此橢圓之長軸長為何? $\cdots(12)$

5、求下列各函數的極限值：

(1) $\lim_{x \rightarrow 7} 15a \cdots(13)$

(2) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{|\pi - x|}{x - \pi} \cdots(14)$

(3) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{x-16}{\sqrt{x}-4} \cdots(15)$

(4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2} \cdots(16)$

6、已知 $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{若 } x \leq 2 \\ a + 2x, & \text{若 } x > 2 \end{cases}$ 試求下列問題 { 說明: $\frac{df(x)}{dx}$ 與 $f'(x)$ 意思相同 }

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 存在，則 $a = ? \cdots(17)$

(2) $f(x)$ 在 $x = 2$ 處是否連續? $\cdots(18)$

(3) $\frac{df(-4)}{dx} = ? \cdots(19)$

7、 $f'(a)$ 存在，試以 $f'(a)$ 表示： $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a-2h)}{h} = ? \cdots(20)$

8、試求下列函數的導函數：

(1) $f(x) = (x^3 - 1)(x^2 - x + 1)$ ，則 $\frac{df(1)}{dx} = ? \cdots(21)$

(2) $f(x) = \frac{2x-5}{5x+3}$ ，則 $f'(x) = ? \cdots(22)$

(3) 設 $f(x) = \frac{(x-1)(x+4)}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$ ，求 $f'(1) = ? \cdots(23)$

9、設 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 5x - 4}}$ ，試求 $f(x)$ 連續的範圍。 $\cdots(24)$

10、設 $f(x) = ax^2 + bx + 3$ 的導函數為 $f'(x)$ ，若在 $x=1$ 的切線斜率為 2，在 $x=-1$ 的切線斜率為 -4，試求在 $x=3$ 的切線方程為何? $\cdots(25)$